LAHENDUSED 9.klass

1.<u>Vastus:</u> a) ei ole võimalik; b) ainult esimesse rühma

<u>Lahendus:</u>

a) Kõikide sangpommide kogukaal on 314 kg. Kui ülesande tekstis kirjeldatud kaheks rühmaks jaotamine oleks võimalik, siis kumbagi rühma kuuluvate sangpommide kogukaal peaks olema 314 : 2 = 157 kg. Teiselt poolt on iga sangpommi kaal paarisarv kilogramme. Teame, et paarisarvude summa on alati võrdne paarisarvuga. Järelikult ei ole võimalik saada kogukaaluks paaritut arvu kilogramme.

b) Leiame rühmadesse kuuluvate sangpommide kogukaalud: esimesse rühma kuuluvate sangpommide kogukaal on (314 + 10) : 2 = 162 kg ning teise rühma kuuluvate sangpommide kogukaal on 314 – 162 = 152 kg.

Paneme tähele, et üheteistkümne sangpommi kaalud jaguvad 4-ga ja ainult kõige raskema sangpommi kaal (50 kg) 4-ga ei jagu. On selge, et 4-ga jaguvate arvude summa jagub ka 4-ga ning summa, mille täpselt üheks liidetavaks on 4-ga mittejaguv arv, 4-ga ei jagu. Järelikult kõige raskem sangpomm (kaaluga 50 kg) võib kuuluda ainult sellisse rühma, mille kogukaal 4-ga ei jagu. Kuna esimese rühma kogukaal 162 kg ei jagu 4-ga (ja teise rühma kogukaal 152 kg jagub 4-ga), siis kõige raskem sangpomm võib kuuluda ainult esimesse rühma.

<u>Hindamine</u>:

a) osa eest 3 punkti:

leitud kõikide sangpommide kogukaal (314 kg)	1p
leitud, et ühte rühma kuuluvate sangpommide kogukaal on paaritu arv kg	1p
põhjendatud, et selline sangpommide jaotamine ei ole võimalik (paarsusega)	1p

b) osa eest 4 punkti:

leitud esimesse ja teise rühma kuuluvate sangpommide kogukaalud (vastavalt 162 kg ja 152 kg)	2p
põhjendatud, et kõige raskem sangpomm võib kuuluda ainult esimesse rühma	<u>2p</u>
	7p

2.<u>Vastus:</u> 5

<u>Lahendus:</u>

Avaldame võrdustest $\frac{a+b}{c} = 2$ ja $\frac{b+c}{a} = 3$ arvu b:

esimesest võrdusest saame $b = 2c - a$ ja teisest $b = 3a - c$.

Järelikult kehtib võrdus

$$2c - a = 3a - c \quad \text{ehk} \quad 4a = 3c.$$

Avaldame nüüd arvud a ja b arvu c kaudu:

võrdusest $4a = 3c$ saame $a = \frac{3}{4}c$ ja

võrdusest $b = 2c - a$ saame, et $b = 2c - \frac{3}{4}c = \frac{5}{4}c$.

Leiame nüüd arvu $\frac{b}{c-a}$ täpse väärtuse:

$$\frac{b}{c-a} = \frac{\frac{5}{4}c}{c - \frac{3}{4}c} = \frac{\frac{5}{4}c}{\frac{1}{4}c} = 5.$$

<u>Hindamine</u>:

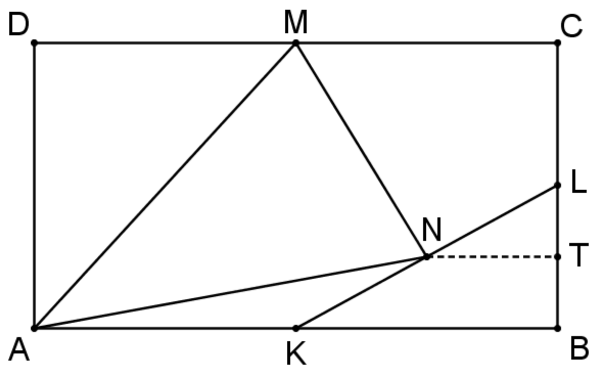
mõlemast antud võrdusest üks arvudest (nt b) avaldatud teiste arvude (nt a ja c) kaudu	2p
avaldatud nt arv a arvu c kaudu	2p
avaldatud ka arv b arvu c kaudu	1p
arvutatud arvu $\frac{b}{c-a}$ täpne väärtus	<u>2p</u>
	7p

Kui leitud lihtsalt arvud, mille korral kehtivad esialgsed võrdused (nt $a = 3$, $b = 5$ ja $c = 4$), ning nende alusel arvutatud arvu $\frac{b}{c-a}$ väärtus, siis anda kokku 2punkti.

3. <u>Vastus:</u> $\mathbf{4\frac{1}{16}\,cm^2}$

<u>Lahendus:</u>

Teeme vastava joonise. Olgu $|AB| = a$ ja $|BC| = b$, siis $ab = 13$ (cm^2).



Ristküliku küljel BC märgime punkti T nii, et $NT \perp BC$. Kuna NT on kolmnurga KBL kesklõik, siis selle pikkus on 2 korda väiksem lõigu KB pikkusest (ja 4 korda väiksem lõigu AB pikkusest).

Kolmnurga AMN pindala saame, kui lahutame ristküliku $ABCD$ pindalast kolmnurga ADM ning trapetsite $ABTN$ ja $NTCM$ pindalade summa.

Kolmnurk ADM moodustab ¼ osa ristkülikust $ABCD$ (kuna see on pool ristkülikust $AKMD$, mis on omakorda pool ristkülikust $ABCD$). Teisisõnu,

$$S_{ADM} = \frac{\frac{1}{2}a \cdot b}{2} = \frac{1}{4}ab = \frac{13}{4} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Trapetsi $ABTN$ alused on pikkustega $|AB| = a$ ja $|NT| = \frac{a}{4}$ ning selle kõrgus on $|TB| = \frac{b}{4}$. Järelikult selle trapetsi pindala on

$$S_{ABTN} = \frac{a + \frac{a}{4}}{2} \cdot \frac{b}{4} = \frac{5a}{8} \cdot \frac{b}{4} = \frac{5}{32}ab = \frac{65}{32} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Trapetsi $NTCM$ alused on pikkustega $|NT| = \frac{a}{4}$ ja $|CM| = \frac{a}{2}$ ja ning selle kõrgus on $|TC| = \frac{3b}{4}$. Järelikult selle trapetsi pindala on

$$S_{NTCM} = \frac{\frac{a}{4} + \frac{a}{2}}{2} \cdot \frac{3b}{4} = \frac{3a}{8} \cdot \frac{3b}{4} = \frac{9}{32}ab = \frac{117}{32} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Järelikult on kolmnurga AMN pindala

$$S_{AMN} = 13 - \left(\frac{13}{4} + \frac{65}{32} + \frac{117}{32}\right) = 13 - \frac{143}{16} = \frac{65}{16} = 4\frac{1}{16} \text{ (cm}^2\text{)}.$$

Hindamine:

tehtud tekstile vastav joonis	1p
kirjeldatud skeem (nt tehtud sobiv tükeldus),	
mille kaudu on võimalik arvutada kolmnurga AMN pindala	2p
arvutatud kolmnurga AMN pindala	4p
	7p

Märkus: on antud vaid üks võimalikest tükeldustest. Teisi on ka.

4. <u>Vastus:</u> 12%

<u>Lahendus:</u>

<u>1.lahendus:</u>

Paneme tähele, et vahetult enne lahuse valamist katseklaasi on kolvis kogu aeg samapalju lahust. Muutub iga kord vaid soola sisaldus kolvis olevas lahuses, kuna katseklaasi kallatud lahuse asemele lisatakse kolbi samapalju vett.

Olgu esialgses kolvis olevas lahuses x ml soola.

Kuna esimesse katseklaasi kallatakse $\frac{1}{12}$ osa kolvis olevast soolalahusest, siis kolbi jääb $\frac{11}{12}x$ ml soola.

Kuna teise katseklaasi kallatakse $\frac{1}{11}$ osa kolvis olevast soolalahusest, siis kolbi jääb $\frac{10}{11}\cdot\left(\frac{11}{12}x\right)=\frac{10\cdot 11}{11\cdot 12}x$ ml soola.

Kuna kolmandasse katseklaasi kallatakse $\frac{1}{10}$ osa kolvis olevast soolalahusest, siis kolbi jääb $\frac{9}{10}\cdot\left(\frac{10\cdot 11}{11\cdot 12}x\right)=\frac{9\cdot 10\cdot 11}{10\cdot 11\cdot 12}x$ ml soola.

Ja nii edasi.

Kuna üheksandasse katseklaasi kallatakse $\frac{1}{4}$ osa kolvis olevast soolalahusest, siis kolbi jääb $\frac{3}{4}\cdot\left(\frac{4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 10\cdot 11}{5\cdot 6\cdot\ldots\cdot 11\cdot 12}x\right)=\frac{3\cdot 4\cdot\ldots\cdot 10\cdot 11}{4\cdot 5\cdot\ldots\cdot 11\cdot 12}x=\frac{3}{12}x=\frac{1}{4}x$ ml soola. Saadud lahust, milles on $\frac{1}{4}x$ ml soola, kallatakse viimasesse katseklaasi ja on teada, et selles on 3% soola.

Kuna esimesse katseklaasi kallatud lahuses on soola 4 korda rohkem, siis selles on 12% soola.

<u>2.lahendus</u>:

Ülesannet on võimalik lahendada, arutledes tagasisuunas. Kui viimases katseklaasis on 3% soola, siis üheksandas on $\frac{4}{3}\cdot 3\%=4\%$ soola. Kaheksandas on $\frac{5}{4}\cdot 4\%=5\%$ soola jne. Järelikult esimeses on $\frac{12}{11}\cdot 11\%=12\%$ soola.

Hindamine:

1.lahendus (võrrandi abil)

tekstist järeldatud, et kolvis on enne lahuse valamist katseklaasi kogu aeg samapalju lahust	1p
ülesanne lahendatud sõltuvalt soola kogusest esialgses lahuses	1p
leitud soola kogus, mis jääb kolbi pärast lahuse valamist esimesse, teise jne katseklaasi	2p
leitud, et enne lahuse valamist viimasesse katseklaasi, on kolvis 4 korda vähem soola, kui esialgses lahuses	2p
leitud esimeses katseklaasis oleva lahuse soola sisaldus protsentides	1p
	7p

2.lahendus (kui alustada lõpust)

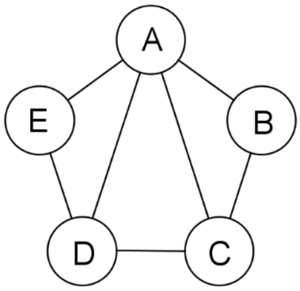
tähelepanek, et saab lõpust alustada	1p
leitud, mitu protsenti soola on üheksandas katseklaasis	2p
leitud, mitu protsenti soola on kaheksandas, seitsmendas jne katseklaasides	3p
leitud esimeses katseklaasis oleva lahuse soola sisaldus protsentides	1p
	7p

Ainult õige vastuse eest anda 2 punkti.

5.

Lahendus:

a) Tähistame ringidesse kirjutatud arvud tähtedega A, B, C, D ja E (vt joonist). Joonisel on kokku 3 kolmnurka, mille tippudeks on kolm ringi, need on ABC, ACD ja ADE. On selge, et ühe kolmnurga tippudesse kirjutatud arvud peavad kõik olema erinevad, ja kuna need peavad paarikaupa erinema 1 või 2 võrra, siis need peavad olema 3 järjestikust naturaalarvu.



Vaatleme näiteks kolmnurka ACD. Olgu arvud A, C ja D mingis järjestuses x, $x+1$ ja $x+2$. Siis on kolm võimalust arvu A valikuks.

1) Juhul $A = x$ saame, et $C = x + 1$ ja $D = x + 2$ (või vastupidi). Siis kolmnurgast ADE leiame, et $E = x + 1$, ning kolmnurgast ABC leiame, et arv B on kas $x + 2$ või $x - 1$. Mõlemal juhul arv B erineb arvust E kas 1 või 2 võrra, mis on vastuolus ülesande tingimusega (E ja B ei ole lõiguga ühendatud).

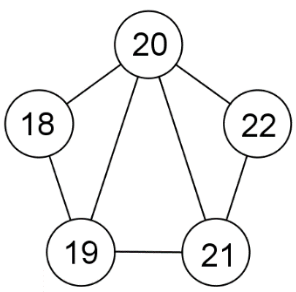
2) Juhul $A = x + 1$ saame, et $C = x$ ja $D = x + 2$ (või vastupidi). Siis kolmnurgast ADE järeldame, et arv E on kas x või $x + 3$, ning kolmnurgast ABC järeldame, et arv B on kas $x - 1$ või $x + 2$. Kuna arvude E ja B vahe ei tohi olla 1 või 2, siis $E = x + 3$ ja $B = x - 1$.

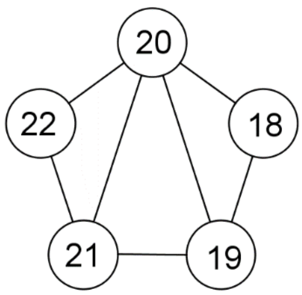
3) Juhul $A = x + 2$ saame, et $C = x$ ja $D = x + 1$ (või vastupidi). Siis kolmnurgast ABC leiame, et $B = x + 1$, ning kolmnurgast ADE leiame, et arv E on kas x või $x + 3$. Mõlemal juhul arv E erineb arvust B kas 1 või 2 võrra, mis on vastuolus ülesande tingimustega (E ja B ei ole lõiguga ühendatud).

Järelikult on antud arvud kujul $A = x + 1$, $B = x - 1$, $C = x$, $D = x + 2$ ja $E = x + 3$ (sümmeetrilisel juhul $A = x + 1$, $B = x + 3$, $C = x + 2$, $D = x$ ja $E = x - 1$).

Saadud arvude summa $5x + 5$ jagub igal juhul 5-ga.

b) Punktis a) tõestatu põhjal leidub vaid 2 võimalust ringidesse arvude kirjutamiseks nii, et nende summa oleks 100. Sellisel juhul $5x + 5 = 100$, kust $x = 19$. Vastavad võimalused on joonisel näidatud.





Hindamine:

a) osa eest 5 punkti:

põhjendatud, et iga kolmnurga tippudes peab olema 3 järjestikust naturaalarvu	1p
leitud üldkujul võimalus ringidesse arvude kirjutamiseks	2p
põhjendatud, et teisi võimalusi arvude kirjutamiseks (v.a. sümmeetrilisel juhul) ei ole	1p
põhjendatud, et kõikide arvude summa jagub 5-ga	1p

b) osa eest 2 punkti:

õige vastus	2p
	7p